Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
2do Examen Parcial (35 %)
Abr-Jul 2018

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (9 ptos.) Sean $L_1 : \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{2y-3}{3}, z = 3,$

$L_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{4-y}{2} = 1 - z$ y $P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta L, que es paralela a L_1 y pasa por P.

b. Halle la ecuación cartesiana del plano Π, que pasa por P y contiene a la recta L_1.

c. Halle el punto de intersección, si es que existe, entre la recta L_2 y el plano Π.

Solución: Como las rectas L y L_1 son paralelas, poseen el mismo vector director que es $v = \left(-2, \frac{3}{2}, 0\right)$. Luego, dado que la recta L pasa por P, sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{aligned} x &= \ \ 1 - 2t \\ y &= -2 + \tfrac{3}{2}t \\ z &= -1 \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Como el punto $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenece a la recta L_1 que está contenida en el plano Π, el vector $\overrightarrow{AP}$ y el vector director de la recta L_1, v, están ambos sobre el plano Π. Así, cualquier vector normal al plano Π es múltiplo escalar del vector

$$\eta = \overrightarrow{AP} \times v = (6, 8, 1)$$

y, por lo tanto, la ecuación del plano Π es

$$6x + 8y + z = 21.$$

Como las ecuaciones paramétricas de la recta L_2 son

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2t \\ y &= 4 - 2t \\ z &= 1 - t \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$, ella intersecta al plano Π si

$$6(-1 + 2t) + 8(4 - 2t) + (1 - t) = 21$$

para algún valor de $t \in \mathbb{R}$, y esto ocurre para $t = {}^6\!/\!_5$. Luego, el punto de intersección es $\begin{pmatrix} {}^7\!/\!_5 \\ {}^8\!/\!_5 \\ -{}^1\!/\!_5 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2. (9 ptos.) Considere los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

del espacio vectorial $M_{2\times 2}$.

a. ¿Son los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 linealmente independientes?

b. Encuentre, explícitamente, el espacio generado por los vectores v_1, v_2, v_3, v_4.

c. ¿El vector $v = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ pertenece a $\operatorname{gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$?

Solución: Dados los escalares λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4, la ecuación

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

equivale al sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que como posee infinitas soluciones, se tiene que los vectores son linealmente dependientes.
Para hallar el espacio generado por los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4, debemos determinar cuáles matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se expresan como combinación lineal de v_1, v_2, v_3 y v_4; es decir,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

lo que equivale a que el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

sea consistente. Como

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & -1 & -1 & a \\ -1 & 1 & 2 & 3 & b \\ 2 & 1 & -1 & 0 & c \\ 0 & -1 & -1 & -2 & d \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & -1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-3a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+a+b \end{array}\right)$$

se tiene que gen$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es igual a

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,\middle|\, c - 3a - b = 0 \quad \text{y} \quad d + a + b = 0 \right\}$$

Como $2 - 3(-2) - (-1) = 9 \neq 0$, el vector $v = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ no satisface las condiciones que caracterizan a gen$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Por lo tanto, $v \notin$ gen$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Pregunta 3. (8 ptos.) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Halle una base para el espacio fila de A, el rango y la nulidad de A.

Solución: Como la matriz A es equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/19 \end{pmatrix}$$

se tiene que una base para el esapcio fila de A es

$$\left\{ (1,\, 0,\, -2,\, 1),\ (0,\, 1,\, -7/2,\, 1/2),\ (0,\, 0,\, 1,\, -1/19),\ \right\}$$

y el rango de A es igual a 3, ya que es igual a la dimensión del espacio fila. Luego, como la matriz tiene 4 columnas y el rango más la nulidad es igual al número de columnas, se tiene que la nulidad de A es igual a 1.

Pregunta 4. (3 ptos. c/u) Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

a. Los cosenos directores de un vector v, de $\mathbb{R}^3$, son $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores distintos de cero en $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente dependientes, entonces $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.

c. Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2y - 5x = 0,\ z = 4 \right\}$. S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

a. Como $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2} \neq 1$, la proposición es falsa.

b. Como dos vectores son linealmente dependientes si, y sólo si, uno es un múltiplo escalar del otro, el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, el cual denotaremos por φ, es 0 o π. Luego,

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\cos(\varphi)| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

por lo que la afirmación es verdadera.

c. Como el vector cero de $\mathbb{R}^3$ no pertenece a S, se tiene que S no puede ser subespacio de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, la afirmación es falsa.